CHƯƠNG III
DÃY SỐ – CẤP SỐ

I. Phương pháp qui nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

- *Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.*
- *Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương n = k tuỳ ý (k ≥ 1), chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1.*

Chú ý: *Nếu phải chứng minh mệnh đề A(n) là đúng với với mọi số nguyên dương n ≥ p thì:*

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì n = k ≥ p và phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $1.4 + 2.7 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$

e) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $2^n > 2n+1 \quad (n \ge 3)$

b) $2^{n+2} > 2n+5$

c) $1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad (n \ge 2)$

d) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}...\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1)$

Bài 3: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*, ta có:

a) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

c) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

d) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

e) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

f) $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Bài 4: Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Bài 5: Dãy số (a_n) được cho như sau: $a_1 = \sqrt{2}, \; a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ với n = 1, 2, …

Chứng minh rằng với mọi n ∈ N* ta có: $a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

II. Dãy số

1. Dãy số

$$u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Dạng khai triển: $(u_n) = u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

2. Dãy số tăng, dãy số giảm

- *(u_n) là dãy số tăng* $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.
  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ *với* $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.
- *(u_n) là dãy số giảm* $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.
  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ *với* $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *với* $\forall n \in N^*$ $(u_n > 0)$.

3. Dãy số bị chặn

- *(u_n) là dãy số bị chặn trên* $\Leftrightarrow \exists M \in R$: $u_n \le M$, $\forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m \in R$: $u_n \ge m$, $\forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M \in R$: $m \le u_n \le M$, $\forall n \in N^*$.

Bài 1: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$ b) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{2n + 1}$ c) $u_n = \dfrac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

d) $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ e) $u_n = n + \cos^2 n$ f) $u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$

Bài 2: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_1 = 2,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(u_n + 1\right)$ b) $u_1 = 15,\ u_2 = 9,\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$

c) $u_1 = 0,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 1}$ d) $u_1 = 1,\ u_2 = -2,\ u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$

Bài 3: Hãy viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n), dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng qui nạp:

a) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = 2u_n + 3$ b) $u_1 = 3,\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ c) $u_1 = 3,\ u_{n+1} = 2u_n$

d) $u_1 = -1,\ u_{n+1} = 2u_n + 1$ e) $u_1 = 1,\ u_{n+1} = u_n + 7$ e) $u_1 = \dfrac{5}{4},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$

ĐS: *a)* $u_n = 2^{n+1} - 3$ *b)* $u_n = \sqrt{n + 8}$ *c)* $u_n = 3.2^{n-1}$

d) $u_n = -1$ *e)* $u_n = 7n - 6$ *f)* $u_n = \dfrac{2^{n+1} + 1}{2^{n+1}}$

Bài 4: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n + 1}{3n - 2}$ b) $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 5}$ c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 2}$

d) $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1}$ e) $u_n = n + \cos^2 n$ f) $u_n = \dfrac{2 - n}{\sqrt{n}}$

Bài 5: Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{2n + 3}{n + 2}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ c) $u_n = n^2 + 4$

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ e) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$ f) $u_n = (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{2n}$

III. Cấp số cộng

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d,\ \forall n \in N^*$ (d: công sai)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ *với $n \ge 2$*

3. Tính chất các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$ *với $k \ge 2$*

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$

Bài 1: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó cho biết số hạng đầu và công sai của nó:

a) $u_n = 3n - 7$ b) $u_n = \dfrac{3n+2}{5}$ c) $u_n = n^2$

d) $u_n = 3^n$ e) $u_n = \dfrac{7-3n}{2}$ f) $u_n = \dfrac{n}{2} - 1$

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1u_2u_3 = 8 \end{cases}$

Bài 3: a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.
b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4: a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.
b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.

Bài 5: a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.
b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai d = 3^0. Tìm số đo của các góc đó.
c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Bài 6: Chứng minh rằng nếu 3 số *a, b, c* lập thành một cấp số cộng thì các số *x, y, z* cũng lập thành một cấp số cộng, với:

a) $x = b^2 + bc + c^2;\ y = c^2 + ca + a^2;\ z = a^2 + ab + b^2$

b) $x = a^2 - bc;\ \ y = b^2 - ca;\ z = c^2 - ab$

Bài 7: Tìm *x* để 3 số a, b, c lập thành một cấp số cộng, với:

a) $a = 10 - 3x;\ b = 2x^2 + 3;\ c = 7 - 4x$ b) $a = x + 1;\ b = 3x - 2;\ c = x^2 - 1$

Bài 8: Tìm các nghiệm số của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$, biết rằng các nghiệm số phân biệt và tạo thành một cấp số cộng.

Bài 9: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, …. Hỏi có bao nhiêu hàng?

IV. Cấp số nhân

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số nhân ⇔ $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$ (q: công bội)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ *với $n \geq 2$*

3. Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ *với $k \geq 2$*

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên: $\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \neq 1 \end{array}\right.$

Bài 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Bài 2: a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.
b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 3: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 4: a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.
b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 5: a) Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.
b) Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá 60^0.

Bài 6: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Bài 7: Số số hạng của một cấp số nhân là một số chẵn. Tổng tất cả các số hạng của nó lớn gấp 3 lần tổng các số hạng có chỉ số lẻ. Xác định công bội của cấp số đó.

Bài 8: Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài 9: Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Bài 10: Tìm 4 số trong đó ba số đầu là ba số hạng kế tiếp của một cấp số nhân, còn ba số sau là ba số hạng kế tiếp của một cấp số cộng; tổng hai số đầu và cuối bằng 32, tổng hai số giữa bằng 24.

Bài 11: Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Bài 12: Chứng minh rằng nếu 3 số $\dfrac{2}{y-x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{2}{y-z}$ lập thành một cấp số cộng thì 3 số *x, y, z* lập thành một cấp số nhân.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1: Tính tổng : $S = 1.2 + 2.3 + ... + n(n+1)$

Bài 2: Dãy số (u_n) xác định bởi công thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 1} \end{cases}$ với $n \geq 1$.

Chứng minh dãy số tăng bằng phương pháp quy nạp

Bài 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{5}{4}$ và $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = \frac{1}{2^{n+1}} + 1$.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy giảm và bị chặn.

Bài 4: Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với:

a) $u_n = 2^{-n}$ b) $u_n = \frac{3^n\sqrt{n+1}}{4^n}$

Bài 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh $u_n = 2$ với mọi $n \geq 1$. Có nhận xét gì về dãy số này ?

Bài 6: Cấp số cộng:

a) Tìm các nghiệm của phương trình: $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$. Biết rằng các nghiệm này tạo thành một cấp số cộng.

b) Cho một cấp số cộng biết tổng ba số hạng đầu tiên bằng –6 và tổng các bình phương của chúng bằng 30. Hãy tìm cấp số cộng đó.

c) Cho phương trình $x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$. Định m để phương trình có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

d) Cho các số *a, b, c* thoả mãn $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ tạo thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng a^2, b^2, c^2 cũng tạo thành một cấp số cộng

e) Nếu số thứ p, thứ q và thứ r của một cấp số cộng lần lượt là a, b, c. Chứng minh rằng:

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0$$

f) Cho biết tổng n số hạng của một cấp số cộng là $S_n = n(5n-3)$. Tìm số hạng thứ p của cấp số cộng đó.

g) Cho hai cấp số cộng lần lượt có tổng n số hạng là $S_n = 7n+1$ và $T_n = 4n+7$. Tìm tỉ số $\frac{u_{11}}{v_{11}}$ của 2 số hạng thứ 11 của hai cấp số đó.

Bài 7: Cấp số nhân:

a) Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số nhân, biết số hạng thứ hai là 16 và tổng ba số hạng đầu bằng 56.

b) Một cấp số nhân (u_n) có 5 số hạng, biết công bội $q = \frac{1}{4}$ và $u_1 + u_4 = 24$. Tìm các số hạng của cấp số nhân này.

Bài 8: Cấp số cộng – Cấp số nhân:

a) Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$, theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Đồng thời $x-1, y+2, x-3y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Hãy tìm *x* và *y*.

b) Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.

c) Tìm hai số a và b biết ba số: $1, a+8, b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và ba số $1, a, b$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

d) Ba số có tổng là 217 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của CSC để tổng của chúng là 280?

e) Một CSC và một CSN có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ 2 của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 bằng nhau. Tìm các cấp số ấy?

Bài 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2^n - 5^n}{2^n + 5^n}$. Tính $S_{10} = \dfrac{1}{u_1 - 1} + \dfrac{1}{u_2 - 1} + ... + \dfrac{1}{u_{10} - 1}$.

Bài 10: Cho dãy số (u_n), kí hiệu tổng n số hạng đầu tiên của nó là S_n, được xác định $S_n = \dfrac{7n - 3n^2}{2}$.

a) Tính u_1, u_2, u_3.

b) Chứng minh dãy số trên là một cấp số cộng và xác định số hạng tổng quát của nó.